"La genèse des équations"
ou
"Les problèmes relatifs aux quantités inconnues"

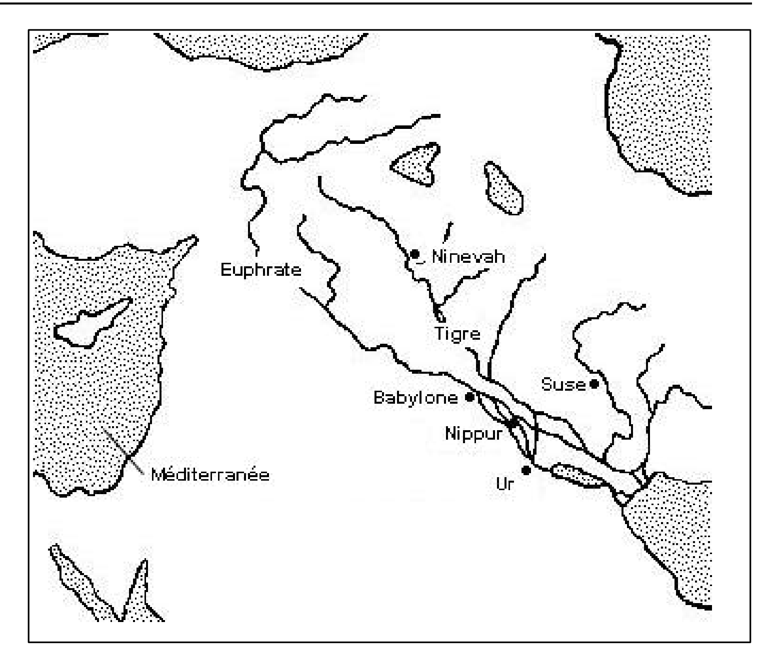
Table des matières :

1. Les Babyloniens

1.1 Bref aperçu historique

Enrichir sa culture

Le *Tigre* et l'*Euphrate* ont permis la fertilisation d'un croissant de terre baptisé « Mésopotamie » au milieu d'une contrée aride et inhospitalière.



La Mésopotamie correspond à peu près à l'actuel Irak. La ville-phare de cette région est la fameuse Babylone.

Avant le XIXè av. J.-C., le pays est peuplé de Sumériens qui élaborent la première civilisation historique et par les Sémites qui ne joueront un rôle politique qu'à partir de SARGON D'AKKAD (2350 av. J.-C.).

Des Amorrites, sémites de l'Ouest, fondent vers 1830 av. J.-C. la première dynastie de Babylone dont le représentant le plus célèbre est HAMMOURABI (1728-1686 env.). L'empire de HAMMOURABI englobe toute la Mésopotamie et correspond au premier âge d'or de la Babylonie. Il fait place, vers 1530 av. J.-C., à une domination kassite, assez mal connue et qui marque le début d'une période de régression culturelle.

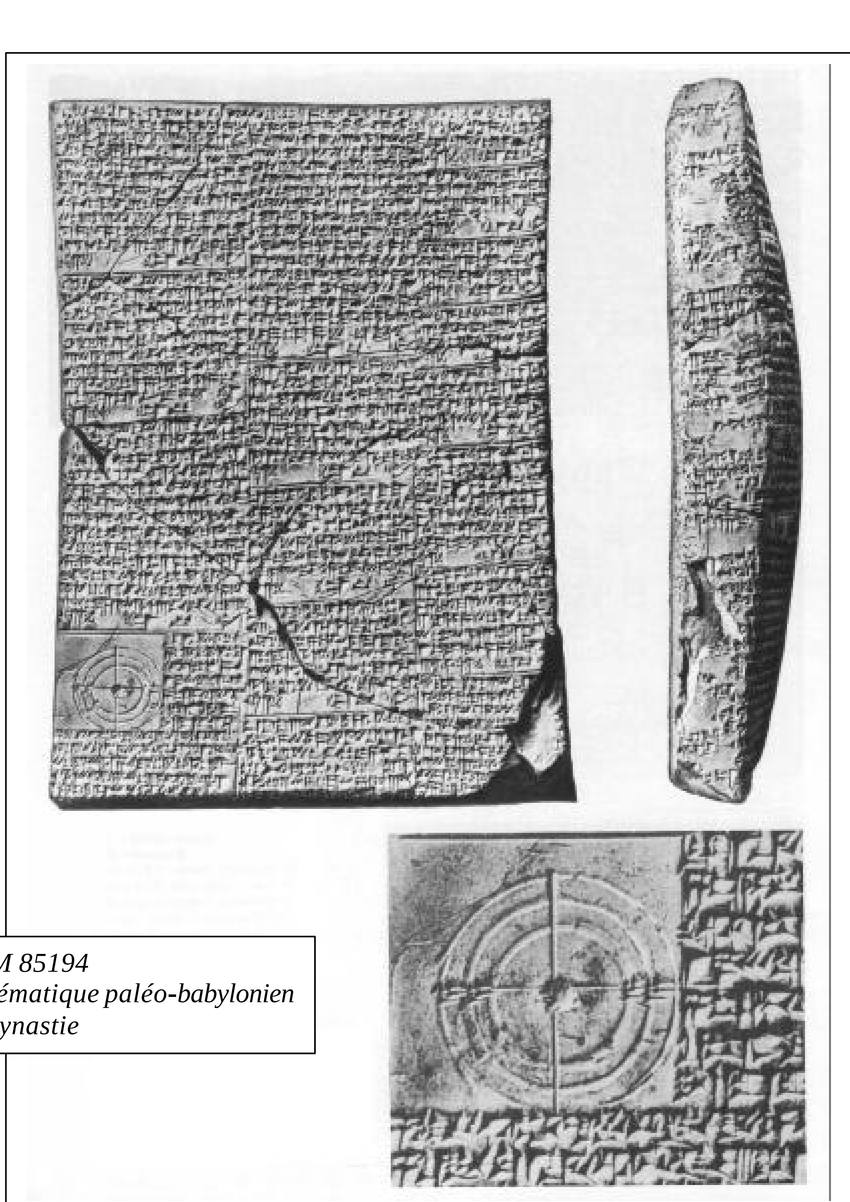
A partir de 1170 av. J.-C., après la chute de cette dynastie, le pays végète sous des princes autochtones, plus ou moins vassaux de l'Assyrie, jusqu'en 612. La Babylonie connaît alors une seconde période faste avec la dynastie de NABOPOLASSAR et NABUCHODONOSOR. La prise de Babylone par les Perses marque le début du déclin de la civilisation babylonienne.

Il y a environ 10000 ans, les peuples de cette région vécurent la révolution agricole. Ils remplacèrent chasse et ramassage par la domestication des animaux et des plantes. Ils construisirent des habitations en briques de boue ou en roseaux, groupées en villages auprès desquels ils cultivèrent leurs champs. Pour stocker leur grain, ils fabriquèrent des greniers et ils ne tardèrent pas à développer commerce et comptes.

Entre 3500 et 3000 av. J.-C., la civilisation établie au Sud de la Mésopotamie s'accrut soudainement pour des raisons encore mal comprises et se centralisa dans les villes d'Ur et d'Uruk. C'est à cette époque qu'apparurent la charrue, le tour de potier et le travail du bronze pour répondre à une vie économique plus exigeante et plus intense. C'est également à cette période que l'on vit se développer l'écriture, le système métrique et l'arithmétique.

Notre connaissance de la culture babylonienne provient de la découverte de plusieurs centaines de milliers de tablettes d'argile recueillies dans divers sites de fouilles mésopotamiennes. Certaines de ces tablettes concernent les mathématiques et sont propriétés de divers musées ou collections universitaires. Les tablettes à caractère mathématique proviennent de la période dite « paléo-babylonienne » c'est-à-dire d'environ 1600 av. J.-C. tandis que les tablettes relatives à l'astronomie n'apparaissent qu'au cours des trois derniers siècles avant notre ère (période des Séleucides, successeurs d'Alexandre).

Une tablette a généralement la taille de la main et sur sa surface, ont été gravés, à l'aide d'un stylet appelé « calame », des signes en forme de « coins » d'où le nom d'écriture cunéiforme donnée à ces caractères.



Tablette BM 85194
Texte mathématique paléo-babylonien
Première dynastie

1.2 Utilité des mathématiques

Les Babyloniens ont utilisé les mathématiques dans de nombreux domaines. Babylone était située sur de nombreuses routes commerciales et le commerce y était très développé. Algèbre et arithmétique étaient utilisés pour calculer des longueurs et des poids, pour échanger de l'argent et des marchandises, pour résoudre des problèmes d'intérêts, pour calculer des taxes, pour répartir la moisson entre le fermier, les prêtres et l'état, …

La majorité des textes recueillis sur les tablettes cunéiformes concerne des problèmes économiques. On trouve également des problèmes concernant la division de champs et les héritages. Les projets de canaux, barrages et autres problèmes d'irrigation impliquèrent également l'utilisation et le développement des mathématiques de même que l'utilisation de briques.

A la période séleucide s'est également développée l'astronomie dans le but de tenir un calendrier (position de la Lune, du Soleil et des différentes planètes connues) afin de prévoir les dates des vacances religieuses et de pratiquer l'astrologie.

1.3 Le système sexagésimal

Nous possédons 10 signes pour écrire nos nombres, nous les appelons les *chiffres*. Il s'agit de *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, *8* et *9*. C'est pourquoi notre système de numération est appelé *système décimal*.

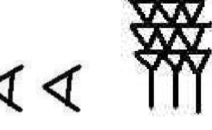
Les scribes babyloniens, quant à eux, n'utilisaient que deux signes.

Le "*clou*" vertical représentant l'unité : 

et le "*chevron*" , associé au nombre 10 : 

Et pourtant, le terme *sexagésimal* évoque une base de numération valant 60.

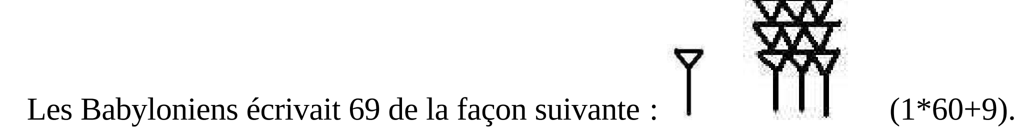
En fait, les nombres de 1 à 59 étaient représentés d'une manière additive en répétant chacun de ces deux signes.

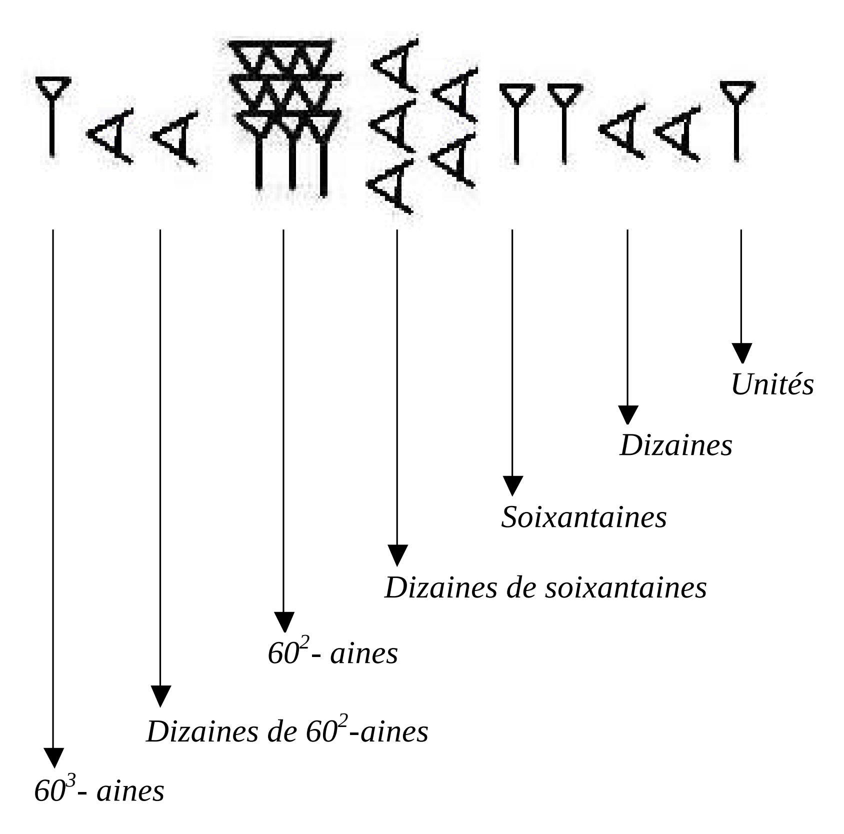
Ainsi, le nombre 29 s'écrivait :  (deux chevrons et neuf clous).

Au delà du nombre 59, l'écriture devenait **positionnelle**, c'est-à-dire que la place occupée par le signe indiquait la valeur à lui octroyer.

Notre système décimal est un système positionnel.

En effet, lorsque nous écrivons *1343*, le premier « *3* » représente le nombre de centaines alors que le deuxième indique le nombre d'unités.

Les Babyloniens écrivait 69 de la façon suivante :  (1*60+9).



Conversion d'un système dans un autre

Le nombre vaut $1.60^3 + 2.10.60^2 + 9.60^2 + 5.10.60 + 2.60 + 2.10 + 1.1 = 323541$

Les Babyloniens limitaient le calcul des fractions aux fractions dont les dénominateurs sont décomposables dans la base 60, c'est-à-dire aux dénominateurs du type $2^P.3^q.5^m$ (*p*, *q* et *m* entiers). Dans ce cadre restreint, la base 60 offre plus de possibilités que la base 10 vu ses nombreux diviseurs (2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20 et 30).

Voici quelques exemples de fractions :

$$1+\frac{30}{60}=1\frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$$

$$1+\frac{20}{60}=1\frac{1}{3}$$

Soulignons enfin que les babyloniens ne divisaient pas mais multipliaient par l'inverse, d'où l'importance des fractions.



Tablette d'argile (2 400 ans av. J.-C.) en écriture cunéiforme où figurent clous et chevrons.

Un dernier problème se pose toutefois.

Comment différencier (2), de (1.60+1=61).

Pendant très longtemps, les scribes les différencièrent en séparant nettement le premier clou du second, puis, ils introduisirent le signe ou indiquant une absence de clou ou de chevron au rang considéré.

Ce double chevron incliné n'apparut cependant qu'au 3[è] siècle av. J.-C. C'est un véritable *chiffre zéro*, le plus vieux zéro de l'histoire.

Malgré ce progrès primordial dans la notation des nombres, les babyloniens ne concevaient pas ce zéro comme une quantité.
Dans un texte de l'époque, l'auteur ne sachant pas exprimer le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même, avait ainsi formulé sa conclusion : *"20 moins 20 … tu vois."*
Et dans un autre texte, on trouve, pour le résultat d'une distribution de grain : *"le grain est épuisé"*.

1.4 Connaissances mathématiques

Dès 2150 av. J.-C., des règles élémentaires de calcul sont utilisées ainsi qu'un système élaboré de poids et mesures et un mode d'emploi de fractions simples dans un système de numération sexagésimal.

On a retrouvé à Nippur un important gisement de tablettes faisant état de tables d'addition, de multiplication, de carrés et de racines carrées. Les sumériens savaient également résoudre certains problèmes que nous traiterions aujourd'hui par des équations et des calculs d'aires ou de volumes.



Tablette babylonienne Plimpton 322
Triplets Pythagoriciens

1.5 Résolution d'équations

A l'époque des babyloniens, les termes « algèbre » (celui-ci apparaîtra plus de 2000 ans plus tard avec le mathématicien arabe AL-KHWARIZMI) et « équation » n'existent pas. On ne distingue d'ailleurs pratiquement pas l'arithmétique de l'algèbre. Des problèmes pratiques ont sans doute donné lieu à la mise au point de techniques de résolution, sortes de « recettes de cuisine » permettant d'arriver à la solution. On ne parle pas d'inconnue et les techniques de résolution sont des textes continus qui n'ont aucune ressemblance avec les notations mathématiques que nous connaissons aujourd'hui. On obtient la solution en appliquant une suite de règles de calcul sans aucune justification.

Dès le début de la civilisation babylonienne, des problèmes sont résolus à l'aide d'équations du 1er et du 2ème degré.
Nous avons l'habitude d'utiliser la lettre « x » pour désigner une inconnue. Ensuite, nous notons « x^2 » son carré, « x^3 » son cube, …
Les babyloniens, quant à eux, employaient un langage géométrique. La quantité inconnue est appelée « *côté* » et sa puissance deux, « *carré* ». Lorsque deux inconnues interviennent, ils les nomment « *longueur* » et « *largeur* » et leur produit « *aire* ».

Voici quelques exemples :

✓ Extrait de *Textes mathématiques de Suse* de E.Bruins et M.Rutten (± 1700 av. J.-C.) :

> « *Un quart de la largeur, ajoute à la longueur : 7 mains … à 10 … 10 c'est la somme. Largeur ?* »

✓ Sur la tablette YBC 4663 (ancien âge babylonien) :

> « *Trouver un rectangle, connaissant son demi-périmètre, 6°30' et son aire, 7°30'*[1]. »

✓ Exemple extrait de la tablette babylonienne BM 13901 :

> « *J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45'.* »

Remarquons ici l'audace babylonienne qui consiste à mélanger des unités différentes.
Ne nous a-t-on pas toujours mis en garde, lors de l'étude du système métrique : on ne mélange pas les « m » et les « m^2 ».

Nous ignorons quelles sont les situations pratiques qui ont pu conduire les babyloniens à se poser de tels problèmes et quelle démarche intellectuelle (démonstration ?) ils ont élaborée pour les résoudre.
Le caractère répétitif des exemples tracés sur les tablettes donnent à penser que le but poursuivi est didactique, c'est l'apprentissage des techniques de résolution qui est visé.

---

[1] Dans les traductions modernes des textes babyloniens, on trouve plusieurs manières d'écrire les nombres. L'une d'entre elles consiste à utiliser les notations que nous utilisons déjà pour mesurer le temps ou les angles, à savoir le système « degrés, minutes, secondes ». Ainsi, le nombre *1°33'45"* signifie $1+\frac{33}{60}+\frac{45}{3600}$

Extrait de *Textes mathématiques de Suse* de E.Bruins et M.Rutten (environ 1700 av. J.-C.) :

Un quart de la largeur, ajoute à la longueur : 7 mains … à 10 … 10 c'est la somme. Largeur ?
Porte 7 à 4 du "quart" : 28 tu trouves ; tu soustrais 10 de 28 : 18 tu trouves. Dénoue l'inverse de 3 : 20 tu trouves ; porte 20 à 18 : 6 tu trouves : 6 la longueur ; tu soustrais 6 de 10 : 4, la largeur …

Texte babylonien	Traduction française
Un quart de la largeur, ajoute à la longueur : 7 mains … à 10 … 10 c'est la somme. Largeur ?	La longueur plus le quart de la largeur d'un rectangle vaut 7. La somme de la longueur et de la largeur vaut 10. Que vaut la largeur ?
Porte 7 à 4 du "quart" : 28 tu trouves ;	Multiplions 7 par 4, le dénominateur de la fraction $\frac{l}{4}$, nous obtenons 28.
tu soustrais 10 de 28 : 18 tu trouves.	Soustrayons 10 de 28, nous trouvons 18.
Dénoue l'inverse de 3 : 20 tu trouves ;	Calculons l'inverse de 3, nous trouvons 20.
porte 20 à 18 : 6 tu trouves :	Multiplions 18 par 20, nous obtenons 6.
6 la longueur ;	La longueur vaut 6 ;
Tu soustrais 6 de 10, la largeur …	Soustrayons 6 de 10 pour obtenir la largeur. La largeur vaut 4.

Une solution « moderne »

Choix des inconnues : soit L la longueur et l la largeur.

Mise en équation : $\begin{cases} \frac{l}{4} + L = 7 \\ l + L = 10 \end{cases}$

Solution :

$\begin{cases} l + 4L = 28 \\ l + L = 10 \end{cases}$ (Multiplier la 1ère équation par 4)

$\begin{cases} 3L = 18 \\ l + L = 10 \end{cases}$ (Soustraire la 2ème équation de la 1ère)

$\begin{cases} L = 6 \\ l = 10 - L = 10 - 6 = 4 \end{cases}$

Exploiter un acquis

Algébriser un problème

Analyser un énoncé

Algébriser un problème

Analyser un énoncé

Sur la tablette YBC 4663 (ancien âge babylonien) :

> *Trouver un rectangle, connaissant son demi-périmètre, 6°30’ et son aire, 7°30’.*
> *Prendre la moitié de la longueur et de la largeur : 3°15’ ; élever au carré : 10°33’45” ; en retrancher l’aire : 3°3’45” ; prendre la racine carrée : 1°45’ ; ajouter la demi-somme : 5° ; retrancher : 1°30’.*

<table>
<tr><th>Texte babylonien</th><th colspan="2">Traduction française</th></tr>
<tr><td>Trouver un rectangle, connaissant son demi-périmètre, 6°30’ et son aire, 7°30’.</td><td colspan="2">Rechercher la longueur et la largeur d’un rectangle sachant que son demi-périmètre vaut 6°30 et son aire 7°30.</td></tr>
<tr><td>Prendre la moitié de la longueur et de la largeur : 3°15’ ;</td><td>Considérons la demi-somme de la largeur et de la longueur c’est-à-dire 3°15.</td><td rowspan="6">Une solution « moderne »

Choix des inconnues : soit L la longueur et l la largeur

Mise en équation[2] : $\begin{cases} L+L=6°30' \\ L.l=7°30' \end{cases}$

Solution :
De la 1ère équation, nous déduisons : $L=6°30'-l$.
Substituons L dans la 2ème équation :

$(6°30'-l)\cdot l=7°30'$

Développons le produit et ordonnons cette équation :

$l^2-6°30'l+7°30'=0$ ➾ Nous ne savons actuellement pas résoudre une telle équation car l’inconnue y figure au 2ème degré !</td></tr>
<tr><td>élever au carré : 10°33’45” ;</td><td>Elevons ce résultat au carré, nous obtenons 10°33’45”.</td></tr>
<tr><td>en retrancher l’aire : 3°3’45” ;</td><td>Retranchons-en l’aire : 10°33’45” – 7°30 = 3°3’45”</td></tr>
<tr><td>prendre la racine carrée : 1°45’ ;</td><td>Et prenons la racine carrée du nombre ainsi obtenu. Nous obtenons 1°45’.</td></tr>
<tr><td>ajouter la demi-somme : 5° ;</td><td>Ajoutons cette racine carrée à la demi-somme de la largeur et de la longueur d’une part, nous obtenons 5°.</td></tr>
<tr><td>retrancher : 1°30’.</td><td>Et retranchons-là à cette même demi-somme ce qui nous donne 1°30’.</td></tr>
</table>

[2] Remarquons qu’il s’agit d’un problème du 2ème degré puisque nous y trouvons le produit des deux inconnues, c’est-à-dire un terme de degré 2.

Le problème babylonien que nous venons d'examiner consiste en fait à rechercher deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Dans certains cas, il est tout à fait possible de deviner ces nombres.

Exemple : deux nombres ont pour somme 7 et pour produit 12.
Quels sont ces nombres ?

Par contre, rechercher deux nombres dont la somme est $\frac{17}{12}$ et le produit $\frac{1}{2}$ ne relève pas de la simple devinette. A priori, il est même difficile de décider si ce problème est résoluble ou impossible !

Tentons d'appliquer la « recette babylonienne » à notre exemple et vérifions que les nombres trouvés sont corrects.

Considérons la demi-somme de la largeur et de la longueur, c'est-à-dire 3°15.	Considérons la demi-somme des deux nombres donnés, c'est-à-dire la moitié de $\frac{17}{12}$, soit $\frac{17}{24}$.
Elevons ce résultat au carré, nous obtenons 10°33'45".	Elevons ce résultat au carré, nous obtenons $\frac{289}{576}$.
Retranchons-en l'aire : 10°33'45" – 7°30 = 3°3'45"	Retranchons-en le produit des deux nombres : $\frac{289}{576}-\frac{1}{2}=\frac{289-288}{576}=\frac{1}{576}$
et prenons la racine carrée du nombre ainsi obtenu. Nous obtenons 1°45'.	et prenons la racine carrée du nombre ainsi obtenu. Nous obtenons $\sqrt{\frac{1}{576}}=\frac{1}{24}$.
Ajoutons cette racine carrée à la demi-somme de la largeur et de la longueur d'une part, nous obtenons 5°	Ajoutons cette racine carrée à la demi-somme des deux nombres d'une part, nous obtenons $\frac{17}{24}+\frac{1}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$;
Et retranchons-là à cette même demi -somme ce qui nous donne 1°30'.	et retranchons-là à cette même demi -somme ce qui nous donne $\frac{17}{24}-\frac{1}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$.
	Vérification : $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$ $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

Appliquer un algorithme

Valider

Tentons maintenant de résoudre ce problème dans le cas général et d'établir dans quelles conditions il est résoluble.

Soit deux nombres x_1 et x_2 dont nous connaissons la somme S et le produit P.

Généraliser

Rechercher x_1 et x_2 revient à résoudre le système suivant : $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 . x_2 = P \end{cases}$.

Essai

De la 1ère équation, nous déduisons : $x_2 = S - x_1$.
Substituons x_2 dans la 2ème équation : $x_1.(S - x_1) = P$
Développons le produit : $Sx_1 - x_1^2 = P$
Ordonnons enfin cette équation : $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$
Il s'agit d'une équation du 2ème degré à une inconnue que nous ne savons actuellement pas résoudre.

Nous allons appliquer l'algorithme babylonien pour mettre au point une formule qui nous permette de calculer directement x_1 et x_2 à l'aide de S et P.

Appliquer un algorithme

Discuter

Valider

Considérons la demi-somme des deux nombres donnés, c'est-à-dire $\frac{S}{2}$.
Elevons ce résultat au carré, nous obtenons $\frac{S^2}{4}$.
Retranchons-en le produit des deux nombres : $\frac{S^2}{4} - P$
et prenons la racine carrée du nombre ainsi obtenu. Nous obtenons $\sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$ [3].   💣 **Attention :** $\frac{S^2}{4} - P \geq 0$
Ajoutons cette racine carrée à la demi-somme des deux nombres, nous obtenons $\frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$;
et retranchons-là à cette même demi-somme ce qui nous donne $\frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$.
Les deux nombres cherchés sont donc $x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$ et $x_2 = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$ et ils existent à condition que $\frac{S^2}{4} - P \geq 0$ c'est-à-dire $S^2 \geq 4P$.
Vérification :   Somme : $x_1 + x_2 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} + \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} = S$ Produit : $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}\right) \cdot \left(\frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}\right) = \frac{S^2}{4} - \left(\frac{S^2}{4} - P\right) = P$

[3] A la suite de ce module se trouve un chapitre consacré aux racines carrées.

Synthétiser

Le système du 2[ème] degré à deux inconnues $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 . x_2 = P \end{cases}$ est résoluble à condition que $S^2 \geq 4P$.

Dans ce cas, les solutions sont $x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$ et $x_2 = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$.

L'équation du 2[ème] degré $x^2 - Sx + P = 0$ possède des racines à condition que $S^2 \geq 4P$.

Dans ce cas, les racines sont $x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$ et $x_2 = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$.

Sur la tablette BM 13901[4] :

J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45'.

Solution donnée sur la tablette :	Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30'). Tu croiseras [30'] et 30' : 15'. Tu ajouteras 15' à 45' : 1. Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 : 30', le côté du carré.
Solution « moderne » :	Soit x le côté du carré. On obtient l'équation suivante : $x^2 + x = 45'$

J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré : 14'30.

Solution donnée sur la tablette* :	Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30'). Tu croiseras [30'] et 30' : 15'. Tu [ajou]teras à 14'30: 14'30°15'. C'est le carré de 29°30'. Tu ajouteras 30', que tu as croisé, à 29°30' : 30, le côté du carré.
Solution « moderne » :	Soit x le côté du carré. On obtient l'équation suivante : $x^2 - x = 14'30''$

*14'30° signifie 14 soixantaines de degrés et 30 degrés.

[J'ai additionné sept fois le côté de mon carré et] onze fois [la surface : 6°15'].

Solution donnée sur la tablette :	Tu ins[criras 7 et 11. Tu porteras] 11 à 6°15' : [1'8°45'. Tu frac]tionneras [en deux 7] : (3°30'). [Tu croiseras] 3°30' et 3°30' : [12°15']. Tu ajouteras [à 1'8°45': 1'21. C'est le carré de 9. Tu soustrairas 3°30', que tu as croi]sé, de 9 : [tu inscriras 5°30'. L'inverse de 1]1 ne peut être dénoué. [Que dois-je poser à 11, qui] me donne [5°30' ? 30', son quotient. Le côté du car]ré est 30'.

Texte babylonien	Traduction en langage mathématique actuel	Généralisation de la méthode babylonienne
J'ai additionné sept fois le côté de mon carré et onze fois la surface : 6°15'.	$11x^2 + 7x = 6{,}25$	$ax^2 + bx + c = 0$
Tu porteras 11 à 6°15' : 1'8°45'.	Multiplions 11 par 6,25, on obtient 68,75.	Multiplions a par $-c$, nous obtenons $-ac$.
Tu fractionneras en deux 7 : (3°30').	Divisons 7 en 2, on obtient 3,5.	Divisons b en 2, nous avons $\frac{b}{2}$.
Tu croiseras 3°30' et 3°30' : 12°15'.	Elevons 3,5 au carré, on obtient 12,25.	Elevons $\frac{b}{2}$ au carré, nous trouvons $\frac{b^2}{4}$
Tu ajouteras à 1'8°45': 1'21.	Ajoutons ce résultat à 68,75, on trouve 81.	Ajoutons ce résultat à $-ac$, nous avons : $\frac{b^2}{4} - ac$.
C'est le carré de 9.	81 est le carré de 9.	Prenons la racine carrée de ce dernier résultat : $\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$
Tu soustrairas 3°30', que tu as croisé, de 9 : tu inscriras 5°30'.	Soustrayons 3,5 de 9, on obtient 5,5.	Soustrayons $\frac{b}{2}$ de $\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$, nous obtenons $\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac} - \frac{b}{2}$.
L'inverse de 11 ne peut être dénoué.	L'inverse de 11 ne peut être calculé en base 60.	
Que dois-je poser à 11, qui me donne 5°30' ? 30', son quotient.	Par combien dois-je multiplier 11 pour trouver 5,5 ? Par 0,5.	
Le côté du carré est 30'.	La réponse est 0,5.	La réponse est $\dfrac{\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac} - \frac{b}{2}}{a}$

Remarquons que le but pédagogique des problèmes babyloniens est indéniable. En effet, non seulement ils restreignent leurs exemples à des nombres tels que $\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$ soit un carré, mais la plupart du temps, ils imposent également que la division finale par a se fasse exactement.

2. Et les Grecs ?

2.1 De la géométrie aux équations


EUCLIDE par JUSTE DE GAND (XV^{è} siècle).
EUCLIDE aurait vécu au III^{è} siècle ap. J.-C. à Alexandrie
où il aurait enseigné la géométrie.

Enrichir sa culture

Les « *Eléments de géométrie* » d'EUCLIDE s'inscrivent dans la période d'épanouissement de la Grèce. La géométrie se distingue enfin complètement de la religion et de la philosophie et devient une science abstraite. Les mathématiques grecques se distinguent par leur recours permanent à la démonstration et à la déduction.
L'œuvre monumentale d'EUCLIDE est un édifice bien construit sur des bases axiomatiques et des démonstrations rigoureuses assurent la cohésion de l'ensemble.

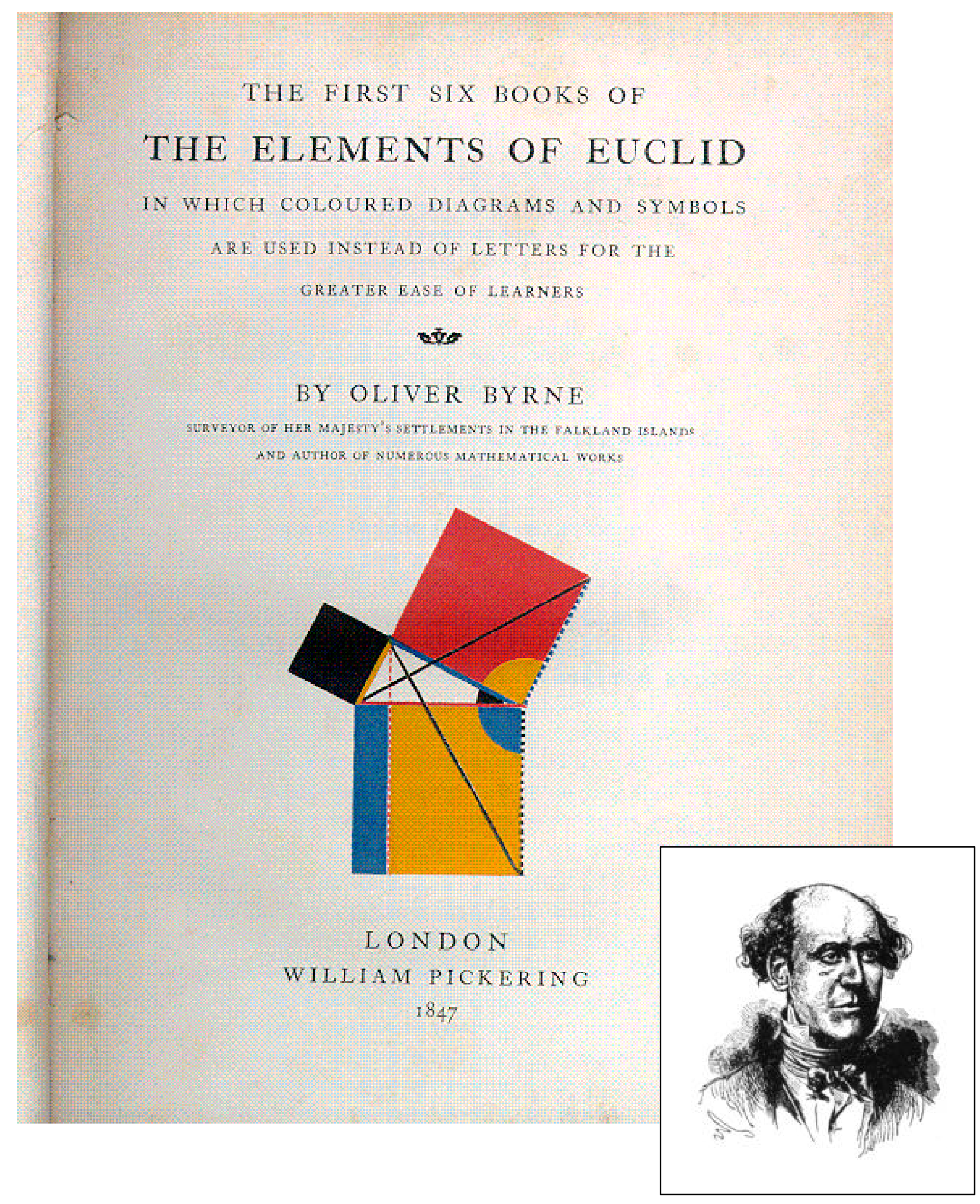
Nous connaissons notamment l'œuvre d' EUCLIDE grâce à la compilation de PROCLUS, le dernier des grands philosophes grecs, qui vécut aux environs de 450 av. J.-C..

Voici ce que dit PROCLUS :

> « En rassemblant les *Eléments*, EUCLIDE en a coordonné beaucoup de EUDOXE, perfectionné beaucoup de THEETETE et qu'il a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montré de manière relâchée. »

L'édifice se constitue de quinze livres dont treize sont d'EUCLIDE ou d'une école groupée autour du mathématicien et dont les deux derniers sont un ajout tardif. L'édition des *Eléments*, aujourd'hui de référence, est celle dite de Heiberg en grec et en latin et établie à partir de 1882 à Leipzig par Heiberg et Menge en tenant compte du manuscrit découvert par Peyrard au Vatican. La traduction anglaise de Heath en est tirée de même que la version récente donnée en français par Bernard Vitrac.

Les quatre premiers livres sont consacrés à la géométrie plane et étudient les propriétés des figures rectilignes et du cercle. Le livre V traite des la théorie des proportions, le VI de l'application des aires, les livres VII, VIII et IX constituent un traité de théorie des nombres, le livre X s'occupe des irrationnels, le livre XI aborde la géométrie dans l'espace, le livre XII compare les aires des figures curvilignes aux aires des figures rectilignes et le livre XIII décrit la construction des polyèdres réguliers.



THE FIRST SIX BOOKS OF

THE ELEMENTS OF EUCLID

IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE GREATER EASE OF LEARNERS

BY OLIVER BYRNE

SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

LONDON
WILLIAM PICKERING
1847

Portrait d'OLIVER BYRNE
(extrait de *The Pythagorean Theorem*, S.J. Kolpas, Dale Seymour Publications 1992)

Voici la page de couverture d'une édition originale des six premiers livres d'Euclide publiée en 1847 par le mathématicien anglais OLIVER BYRNE. Cette première page est joliment illustrée par le théorème de PYTHAGORE (pr. II,47).

L'intitulé de ce livre est clair :

> « The first six books of Euclid's elements in which coloured diagrams and figures are used instead of letters for the greater ease of learners. »

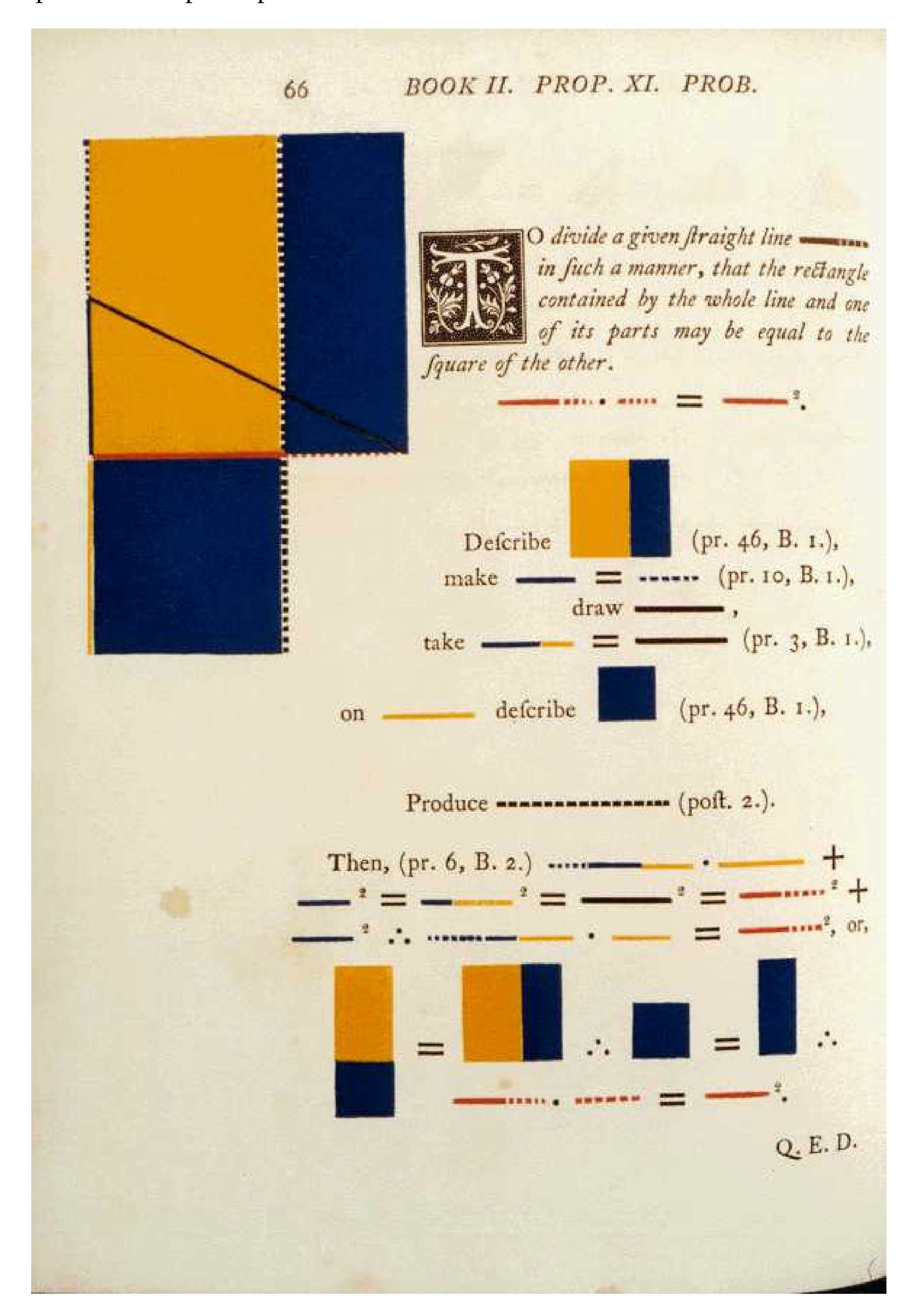
2.2 Proposition XI du livre II des Eléments d'EUCLIDE

« Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant. »

Précisions syntaxiques :

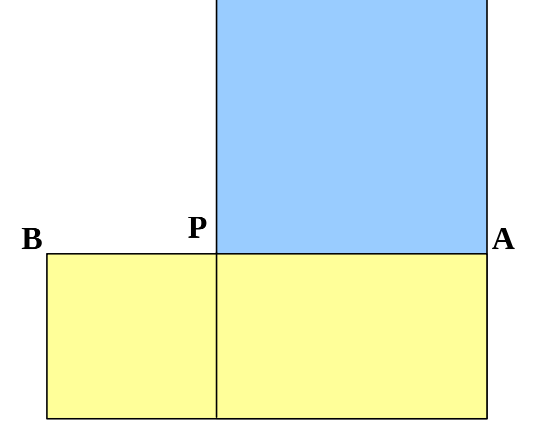
✓ "couper une droite donnée" signifie "construire un point sur un segment donné".

✓ "le rectangle compris sous la droite et l'un des segments" signifie "le rectangle ayant pour longueur le segment donné et pour largeur l'un des deux segments obtenus en coupant celui-ci par le point construit".



La proposition II,11 illustrée par Byrne.

En utilisant nos conventions modernes, cela revient à **construire un point *H* sur [*AB*]** de telle façon que le rectangle de longueur *AB* et de largeur *BP* ait même aire que le carré de côté *AP*.



La solution d'Euclide : équerre et compas

Réaliser une construction géométrique

Description de la construction :

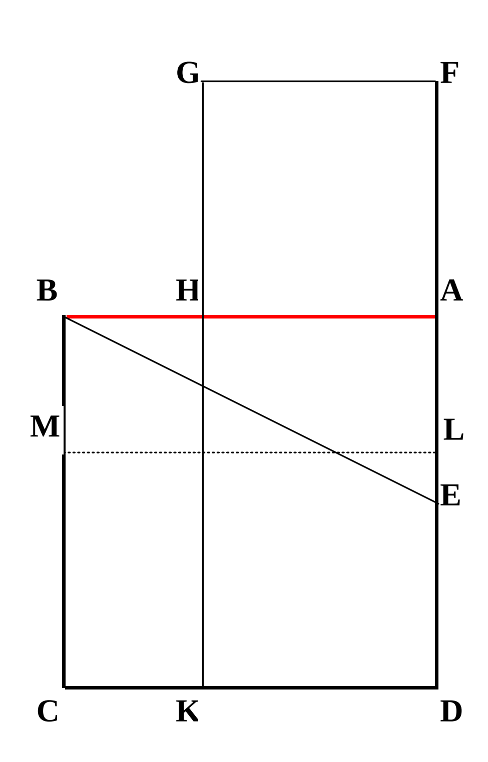
① Construire sur *AB* le carré *ABCD*.

② Construire le milieu *E* de [*AD*].

③ Reporter la longueur de [*EB*] à partir de *E* sur la droite *DA*. On obtient le point *F*.

④ Construire un carré sur [*AF*]. On obtient le point *H* sur [*AB*] et en prolongeant le côté *GH* jusqu'à *CD*, le point *K*.

⑤ Construisons le point *M* sur [*BC*] et le point *L* sur [*AD*] tel que [*BM*] et [*AL*] aient même longueur que [*BH*].



Nous allons démontrer que le point *H* est le point cherché c'est-à-dire que le rectangle de longueur *BA* et de largeur *BH* ou *BM* (délimité par le trait en pointillés) a même aire que le carré *AFGH*.

Démontrer

$FD.FA + AE^2 = FE^2$ (proposition VI, 2[5])

$FD.FG + AE^2 = BE^2$ (car $FE = BE$, par construction et car $FA = FG$)

$FD.FG + AE^2 = BA^2 + AE^2$ (Pythagore dans le triangle rectangle *ABE*)

$FD.FG = BA^2$ (en soustrayant AE^2 aux deux membres)

[5] Nous allons démontrer cette proposition dans les pages suivantes pour ne pas alourdir le texte.

Cette dernière égalité peut être illustrée par l'égalité des aires du carré *ABCD* et du rectangle *FGKD*.

Raisonner sur une figure

En soustrayant l'aire commune du rectangle *AHKD*, on obtient l'égalité des aires du rectangle *BHKC* et du carré *FGHA*.

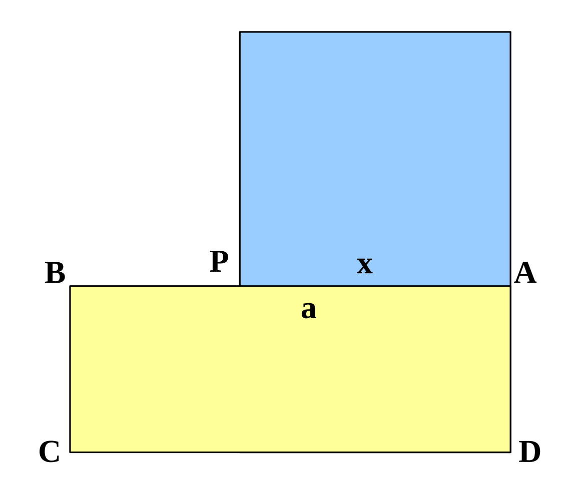
Or le rectangle *BHKC* a même aire que le rectangle de longueur *BA* et de largeur *BM* puisque $BA = BC$.

Donc, le résultat annoncé est bien démontré.

<u>La solution « moderne »</u> : la force du formalisme

Soit *a* la longueur de [*AB*].

Appelons *x* la longueur du segment [*AP*] où *P* désigne le point cherché.



Algébriser

Le segment [*BP*] a donc comme longueur *a*-*x*, de même par conséquent que le côté *BC* du rectangle *ABCD*.

Par conséquent : aire rectangle *ABCD* = $a.(a-x)$

aire carré de côté *AP* = x^2

Le rectangle *ABCD* et le carré de côté *AP* ont même aire $\Leftrightarrow$ $a.(a-x) = x^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + ax - a^2 = 0$

Nous pouvons résoudre cette équation « à la mode babylonienne ».

Pour rappel :

L'équation du 2ème degré $x^2 - Sx + P = 0$ possède des racines à condition que $S^2 \geq 4P$. Dans ce cas, les racines sont $x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$ et $x_2 = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$.

$x^2 + ax - a^2 = 0$ possède des racines à condition que $a^2 \geq -4a^2$ c'est-à-dire $5a^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai.

Appliquer une formule

On obtient les racines suivantes :

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = a.\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = a.\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

La deuxième racine est à rejeter dans le problème actuel car elle conduit à une longueur négative.

Le point *P* satisfaisant au problème posé se trouve donc sur [*AB*] à une distance $a.\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ de *A*.

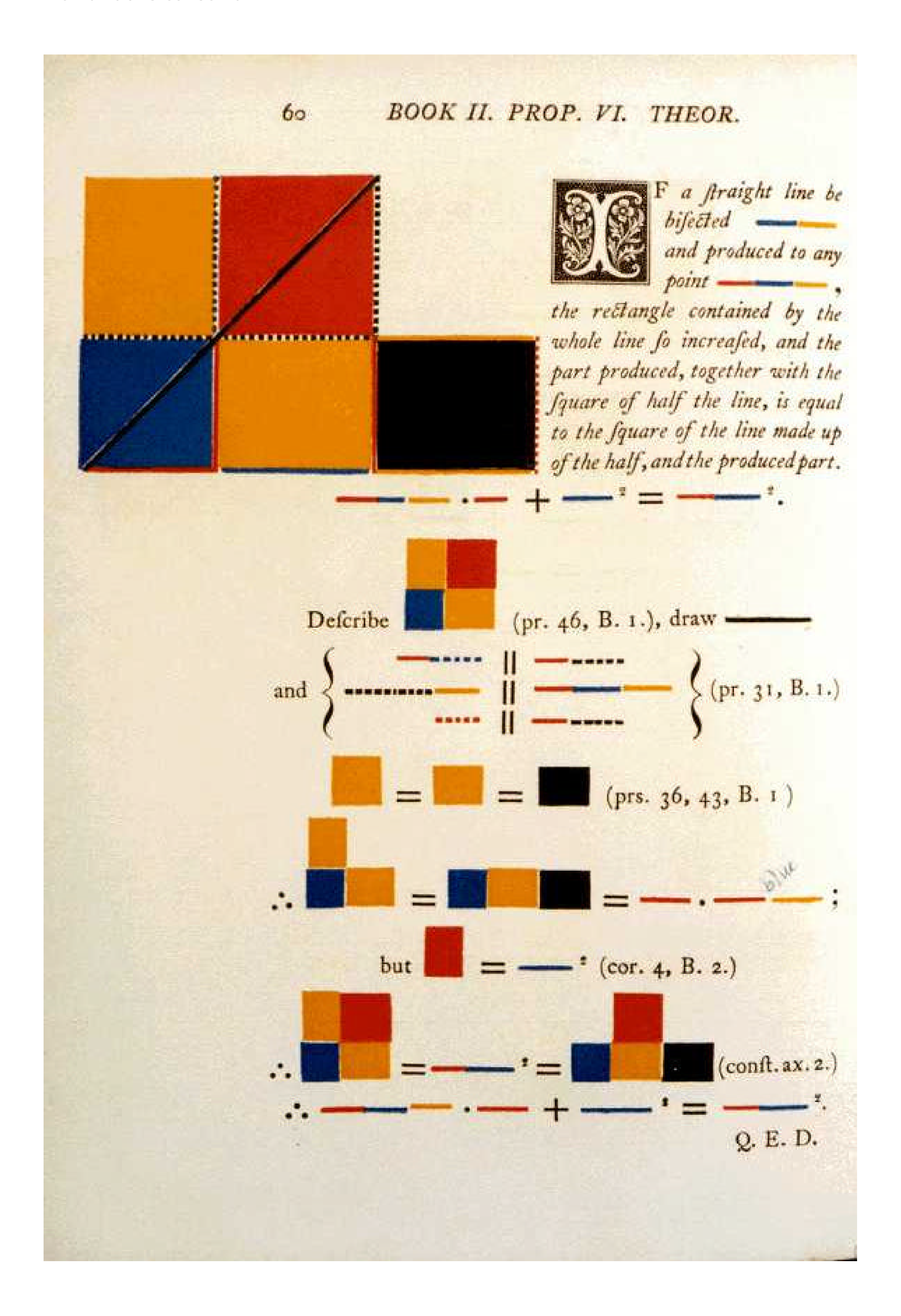
<u>Remarques</u> :

1. Le nombre $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ est lié au fameux « ***le nombre d'or*** ».
   Le nombre d'or est généralement noté « j ».

2. EUCLIDE fait de la géométrie avec pour seuls instruments une règle non graduée et un compas, et pourtant certaines analogies de raisonnement avec la technique babylonienne, purement calculatoire, sont flagrantes.

2.3 La proposition II,6 d'EUCLIDE

Demandons conseil à BYRNE



60 BOOK II. PROP. VI. THEOR.

If a ſtraight line be biſected and produced to any point, the rectangle contained by the whole line ſo increaſed, and the part produced, together with the ſquare of half the line, is equal to the ſquare of the line made up of the half, and the produced part.

Deſcribe (pr. 46, B. 1.), draw

and (pr. 31, B. 1.)

(prs. 36, 43, B. 1)

∴ = = . ;

but = ² (cor. 4, B. 2.)

∴ = ² = (conſt. ax. 2.)

∴ . + ² = ².

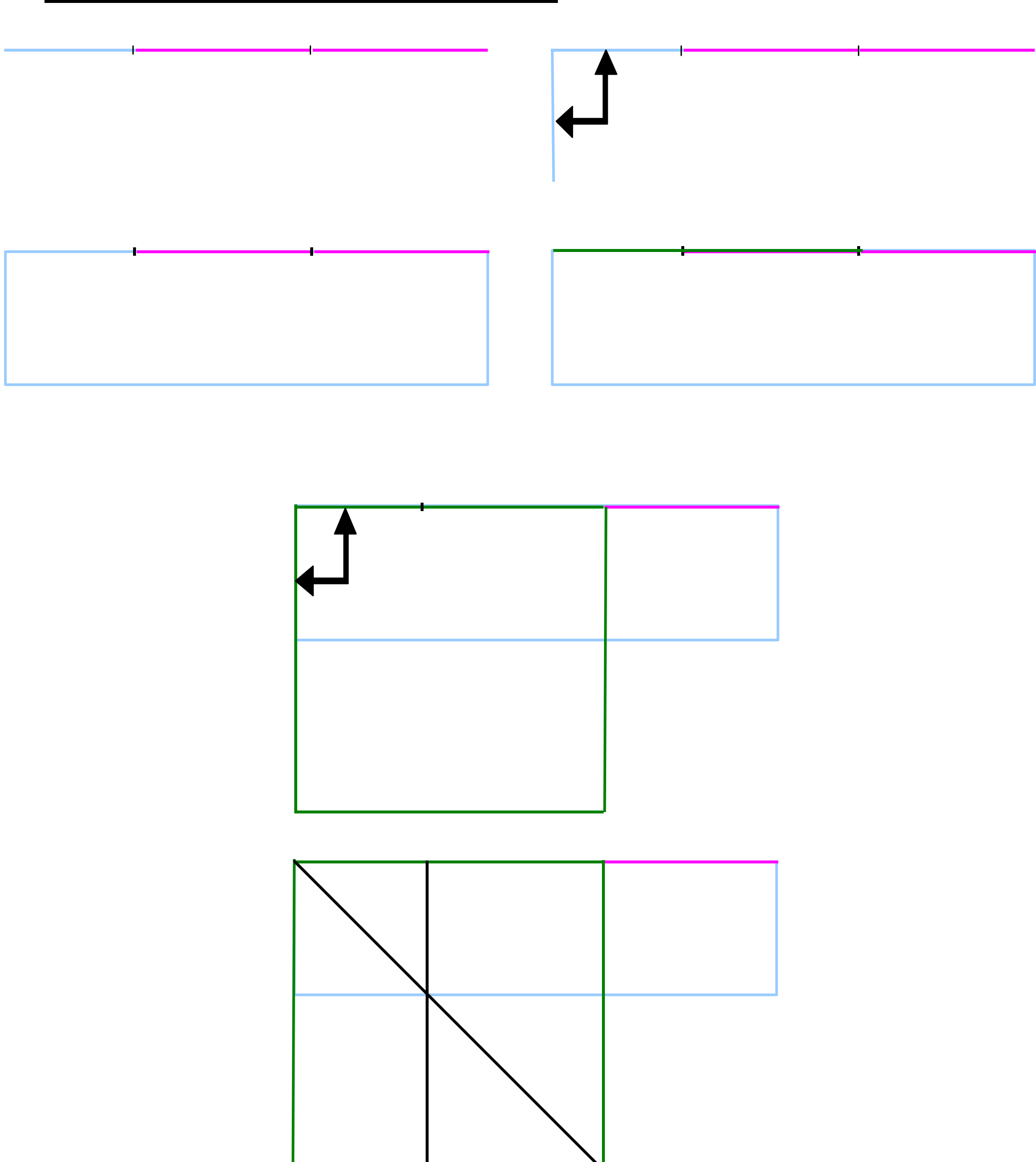
Q. E. D.

Voici le texte de la proposition II,6 des *Eléments* telle que nous la trouvons dans le merveilleux livre de BYRNE :

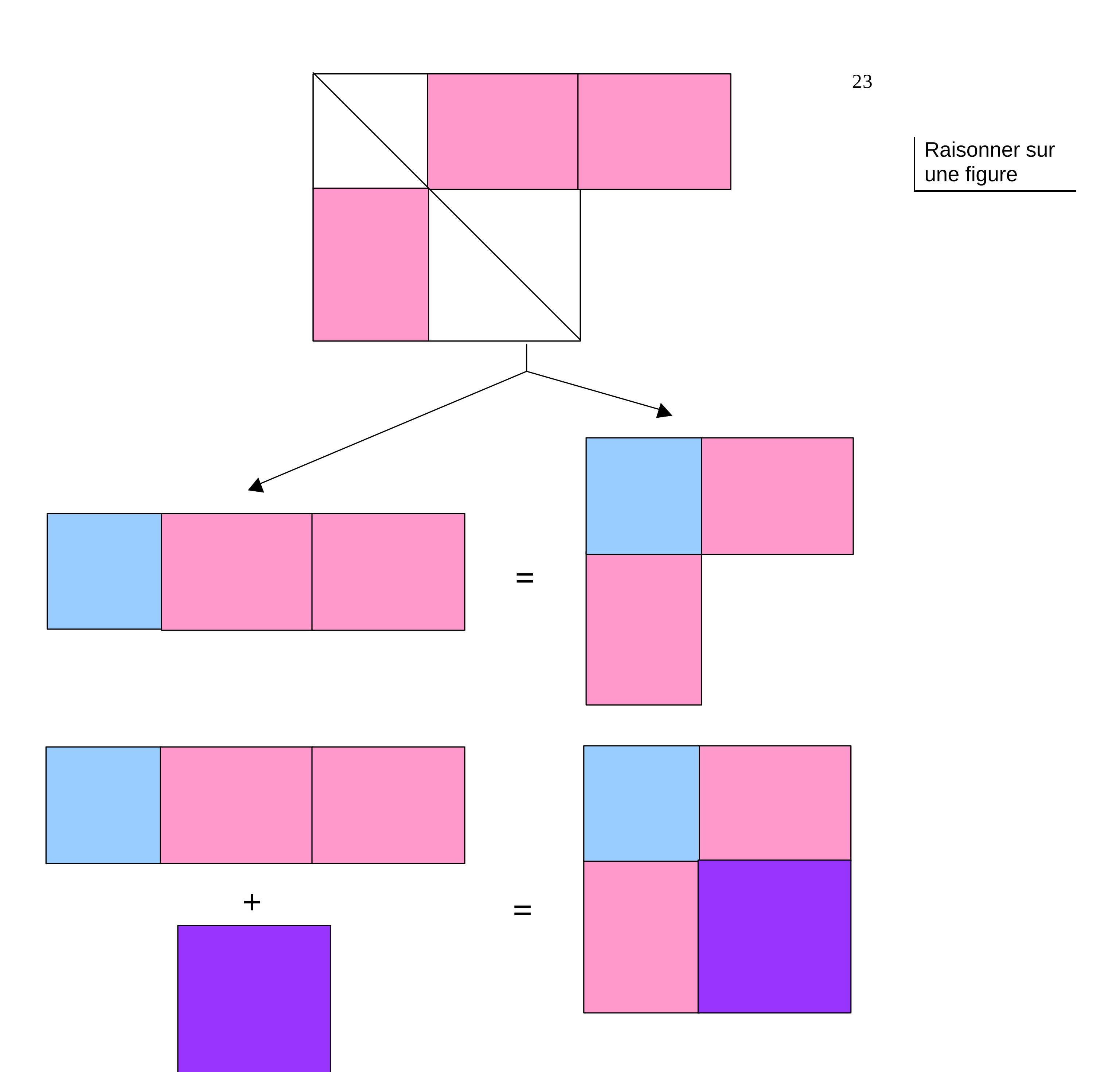
> « If a stright line be bissected and produced to any point, the rectangle contained by the whole line so increased, and the part produced, together with the square of the line, is equal to the square of the line made up of the half, and the produced part. »

A l'aide des dessins de BYRNE, il est possible de recomposer la démonstration d'EUCLIDE ; avec le formalisme moderne, la démonstration est un jeu d'enfant.

Jouons comme BYRNE aux formes de couleurs :



Raisonner sur une figure



Avec les notations modernes :

Algébriser

Nous devons démontrer que $(2x+y)\,y+x^2=(x+y)^2$, ce qui est évident.

y **x** **x**

2.4 Comparaison Babyloniens - Grecs

Comparer deux techniques

Babylone	Euclide
Point de départ : $x^2 - px = q$ Question : que vaut x ?	Point de départ : Question : où est H ?
Méthode algébrique : succession de calculs.	Méthode géométrique : constructions à la règle et au compas. (Pour faciliter la comparaison, nous appellerons a la longueur du segment [AB].) Construire H revient à calculer la longueur du côté du carré *AFGH*.
Calculer $\frac{p}{2}$ et son carré $\frac{p^2}{4}$.	Rechercher le milieu de [AD] ; on obtient le point E et [AE] mesure $\frac{a}{2}$.
Additionner $\frac{p^2}{4}$ et q et calculer la racine carrée du résultat obtenu : $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$.	Reporter BE sur DA à partir de E. Dans le triangle BAE : $EB = \sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ (Pythagore)
Soustraire $\frac{p}{2}$ de cette racine : $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\frac{p}{2}$.	Pour obtenir le côté du carré *AFGH*, il reste à soustraire AE. $AH = AF = FE - AE = \sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2} - \frac{a}{2}$

Conclusion : EUCLIDE réalise la même démarche que les Babyloniens mais dans le cas particulier où le second membre de l'équation est le carré du coefficient de x.

3. Résoudre une équation du 2ème degré à une inconnue

3.1 A la babylonienne

Il s'agit de résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).
Connaissant la solution de l’équation $x^2 - Sx + P = 0$ via les babyloniens, ramenons-nous à ce type d’équation en divisant les deux membres de notre équation par a.

Exploiter un acquis

Nous obtenons : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Posons $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$, nous obtenons $x^2 - Sx + P = 0$.

A condition $S^2 \geq 4P$, cette équation a pour racines :

$$x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} \text{ et } x_2 = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}.$$

Remplaçons à présent S et P en fonction de a, b et c.

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2}{4} - \frac{c}{a}} = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2}{4} - \frac{c}{a}} = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La condition $S^2 \geq 4P$ devient successivement : $\left(\frac{-b}{a}\right)^2 \geq 4\frac{c}{a}$

$\frac{b^2}{a^2} \geq \frac{4c}{a}$

$b^2 \geq 4ac$ (multiplication par le nombre positif a^2)

$b^2 - 4ac \geq 0$

3.2 La technique actuelle

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a.\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)=0$$ (mise en évidence de a)

$$\Leftrightarrow a.\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=0$$ (préparation d'un carré)

$$\Leftrightarrow a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0$$ (apparition du ½ coeff. de x)

$$\Leftrightarrow a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$ (en posant $\Delta=b^2-4ac$)

Deux cas peuvent alors être distingués :

Discuter

1. $\underline{\Delta \geq 0}$: $ax^2+bx+c=0$

$$\Leftrightarrow a.\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right).\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a.\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right).\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \quad \text{ou} \quad x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Remarquons que lorsque $\Delta=0$, les deux racines se réduisent toutes deux à $\frac{-b}{2a}$.
On ne peut donc parler que d'une seule racine que l'on appelle cependant « racine double ».

2. $\underline{\Delta < 0}$: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est une somme de deux nombres positifs.

Le résultat est donc strictement positif. L'équation est alors impossible.

Synthétiser

Résolution de l'équation du deuxième degré $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) :

1. $\underline{\Delta \geq 0}$: l'équation possède deux solutions $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. $\underline{\Delta < 0}$: l'équation ne possède pas de solutions.

4. Les Arabes

4.1 La véritable naissance de l'algèbre

Les connaissances que nous avons acquises dans le domaine de la résolution des équations peuvent être résumées de la façon suivante :

Equations du 1er degré à une inconnue : $ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$

Solution : $x = -\frac{b}{a}$

Equations du 2ème degré à une inconnue : $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

Solution : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

Impossible sinon

La ou les solution(s) peuvent être directement déterminée(s) à partir des coefficients de l'équation, la résolution se présente sous la forme d'une « recette » que l'on applique aux coefficients de l'équation.

Comme les exemples que nous avons étudiés ensemble le prouvent, ce genre de technique de résolution fut connu très tôt dans l'histoire des mathématiques, même si le formalisme[6] est apparu plus tard.

AL-KHWARIZMI[7] : « Kitab al-jabr wa al-muqabala »
Un événement de taille dans l'histoire des mathématiques !

Enrichir sa culture

Le livre « Kitab al-jabr wa al-muqabala » est paru entre 813 et 830. Ces dates sont celles du début et de la fin du règne du calife AL-MAMUN qu'AL-KWARIZMI remercie dans le préambule de son livre en tant que bienfaiteur des hommes de lettres et de sciences.

AL-KHWARIZMI était un mathématicien et astronome de la « Maison de la Sagesse » de Bagdad.
Ce qu'il se propose de réaliser est énorme : résoudre toutes les équations par radicaux, c'est-à-dire rechercher des formules qui donnent directement les racines[8] d'une équation à l'aide des coefficients de cette dernière. Il ne s'agit plus, comme au temps des Babyloniens, de résoudre l'un ou l'autre problème mais bien de traiter des classes de problèmes, les solutions élaborées pouvant être appliquées indifféremment dans les domaines de l'arpentage, des échanges commerciaux ou des successions.

---

[6] C'est-à-dire les notations utilisées.
[7] Le nom de ce mathématicien a donné le mot "algorithme".
[8] Les racines d'une équation sont les solutions de cette équation.



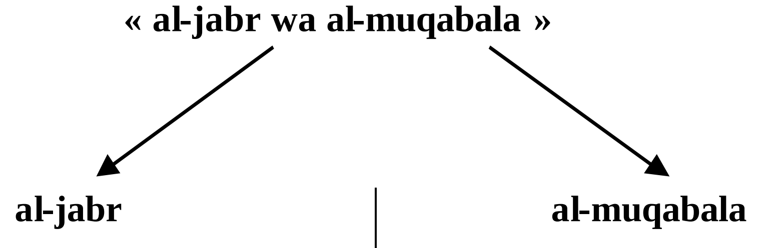
A la période où AL-KHWARIZMI est à la « Maison de la Sagesse », il prend probablement connaissance des *Eléments* d'EUCLIDE qui ont été traduits par l'un de ses collègues. C'est pourquoi il s'efforce de résoudre chacune des classes d'équations qu'il traite, non seulement algébriquement, mais aussi géométriquement.

De plus, AL-KHWARIZMI appelle la quantité à déterminer la « chose » et se détache ainsi de tout contexte précis. Il prétend que tout problème peut être ramené à la résolution d'une équation à une inconnue d'un des six types suivants[9] :

$ax^2 = bx$	$ax^2 + bx = c$
$ax^2 = c$	$ax^2 + c = bx$
$bx = c$	$ax^2 = bx + c$

Quels sont les outils utilisés par AL-KHWARIZMI pour mettre en œuvre ce vaste programme ? Ils sont présents dans le titre de son livre !

« al-jabr wa al-muqabala »



al-jabr

« remettre à sa place »

Ce terme correspond à la fois à une discipline et à un procédé de calcul.

al-jabr : a donné le mot « algèbre » en français.

al-jabr : opération qui permet la transposition dans l'autre membre de l'équation des termes soustractifs. Nous avons l'habitude de dire : « Quand un terme change de membre, il change de signe. »

$x^2-5x=2$ devient $x^2=5x+2$

al-muqabala

« remplacer deux termes de même type situés de côtés différents de l'équation par leur différence du côté du plus grand »

al-muqabala : opération qui consiste à réduire les termes semblables.

$x^3+6x=2x+4$ devient $x^3+4x=4$

C'est là toute la base de la résolution des équations. Chaque jour, lorsque nous faisons de l' **al-jabr** au cours de mathématique, nous utilisons les techniques **al-jabr** et **al-muqabala** !

---

9 Cela peut nous paraître étonnant qu'il y ait plusieurs types d'équations du 2ème degré, par exemple, mais n'oublions pas qu'à cette époque, il n'était pas question de nombres négatifs. Il était donc exclu d'écrire, par exemple : $3x^2-2x=-6$.

4.2 Un exemple traité par AL-KHWARIZMI

Examinons la résolution d'une équation du 2ème degré rédigée par AL-KHWARIZMI.

« Un carré et dix racines ont une somme de trente-neuf dirhems ; c'est-à-dire, quel doit être le carré qui, augmenté de dix de sa propre racine, a pour total trente-neuf. »

Comparer deux techniques

Solution algébrique :

> « Divise le nombre de racines par deux, ce qui donne cinq dans le cas actuel. Ce nombre, multiplie-le par lui-même, on obtient vingt-cinq. Ajoute cela à trente-neuf, la somme est soixante-quatre. Maintenant, prend la racine de ce nombre, qui est huit, et soustrais-lui la moitié du nombre de racine, qui est cinq. Le reste est trois. C'est la racine du carré cherché, le carré lui-même est neuf. »

En notations actuelles, l'équation à résoudre est $x^2 + 10x = 39$ et la solution proposée s'écrit :

$$(x+5)^2 = 39 + 25 = 64$$

$$x + 5 = \sqrt{64} = 8$$

$$x = 8 - 5 = 3$$

Solutions géométriques :

Première solution proposée :

✓ Supposons que le carré AB[10] ait pour côté la racine désirée.

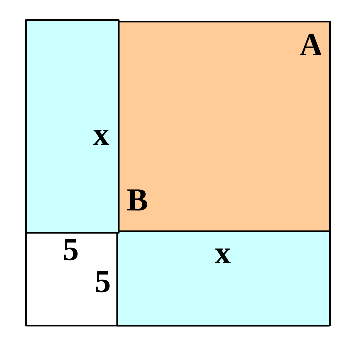
✓ Sur les quatre côtés de ce carré, on construit un rectangle dont la largeur vaut le quart du nombre de racines, c'est-à-dire ¼ de 10, soit 2,5.

✓ La surface du carré et des quatre rectangles vaut 39.

✓ Pour compléter la figure et obtenir le carré CD, nous devons ajouter quatre fois le carré de côté 2,5.

✓ Comme l'aire du grand carré vaut 64, sa racine vaut 8, d'où le côté du carré de départ vaut $8 - 2.2{,}5 = 3$.

[10] Autrefois, on avait l'habitude de donner la diagonale d'un carré pour le désigner.



Deuxième solution proposée : solution donnée par EUCLIDE (proposition 4 du livre II)

Cette solution est basée sur le fait que le carré de *a+b* est égal à la somme des carrés de *a* et *b* et de deux rectangles *ab*.

C'est l'expression géométrique d'une formule de produit remarquable bien connue :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

5. Et après le degré 2 ?

Enrichir sa culture

La théorie des équations, tout d'abord intimement mêlée à l'arithmétique, a occupé les mathématiciens depuis l'époque babylonienne jusqu'au début du XIX^{è} siècle. Au fil du temps, règles et recettes vont se généraliser, le formalisme va se développer pour aboutir à la constitution de l'algèbre classique.

Les Babyloniens nous ont enthousiasmés par leur habileté calculatoire, nous avons décelé l'algèbre qui se cachait sous les problèmes géométriques abstraits que se posaient les Grecs et nous avons brièvement évoqué la contribution des mathématiciens arabes qui ont posé les premiers fondements véritables de l'algèbre.

En Europe occidentale, il faudra attendre la renaissance pour que l'algèbre se développe, avec les écoles allemande et surtout italienne. On assiste à un détachement progressif par rapport aux problèmes concrets et par rapport à la géométrie.

Le premier livre imprimé contenant de l'algèbre est dû à LUCA PACIOLI (1450-1510), frère franciscain qui occupa une chaire de mathématique à Milan.

Le souci des algébristes est d'établir des formules du même type que celle permettant de résoudre les équations du second degré, mais pour des équations de degré supérieur.

La résolution des équations cubiques (3ème degré) et biquadratiques (4ème degré) passe par de grands noms tels que SCIPIONE DEL FERRO (1456-1526), NICOLO[11] TARTAGLIA (1449-1557), JÉRÔME CARDAN (1501-1576) et RAFAËL BOMBELLI (1526-1572).

Entre-temps, les notations se sont simplifiées par l'intermédiaire de mathématiciens tels que NICOLAS CHUQUET (1445-1500), MICKAËL STIFEL (1487-1567, puissances négatives) , SIMON STÉVIN(1548-1620, puissances fractionnaires) et la notion de nombre a elle aussi évolué. On fait appel à des « racines impossibles » qui donneront vie plus tard aux nombres complexes. Le français FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603) est le premier à désigner par des lettres non seulement les inconnues comme c'était déjà l'usage, mais aussi les coefficients (terme qu'il introduisit d'ailleurs) : les voyelles désignent les inconnues et les consonnes les coefficients. L'algèbre s'érige de la sorte en l'étude de

[11] Nous avons trouvé les trois orthographes suivantes du prénom de TARTAGLIA : NICOLO, NICCOLO et NICOLLO. Il a fallu choisir !

types généraux d'expressions et d'équations. Désormais, les mathématiciens peuvent s'intéresser à la structure des problèmes et plus seulement à des cas particuliers.

Au XVII^{è} siècle, les notations de VIÈTE seront simplifiées et atteindront leur forme actuelle avec le français RENÉ DESCARTES (1596-1650). Soulignons notamment que DESCARTES utilise les dernières lettres de l'alphabet (x, y, …) au lieu des voyelles pour désigner les inconnues. Le toulousain PIERRE DE FERMAT (1601-1665), quant à lui, obtient des résultats importants à propos des nombres entiers et rationnels.

En 1700, nous pouvons considérer que l'algèbre est une branche à part entière des mathématiques.

Cependant, au XVIII^{è}, les algébristes sont toujours à la recherche de méthodes de résolution pour des équations de degré quelconque, permettant d'exprimer l'inconnue en tant qu'expression algébrique composée avec les coefficients de l'équation, ce que l'on a coutume d'appeler une « résolution par radicaux ». De grands noms tels que RENÉ DESCARTES ou ISAAC NEWTON (1642-1727) s'y intéressent mais il faut attendre 1770 et les *Mémoires* de ALEXANDRE VANDERMONDE (1735-1796) et surtout de LOUIS LAGRANGE (1736-1813) pour voir le problème progresser. LAGRANGE apporte en effet une contribution essentielle en établissant dans son *Mémoire* le bilan méthodologique de toutes les recherches antérieures sur ce sujet.

Enfin, au XIX^{è} siècle, le mathématicien norvégien NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) clôt l'histoire en établissant le résultat suivant : « Il est impossible de résoudre par radicaux les équations générales de degré supérieur ou égal à 5. » C'était en 1826.

6. Bibliographie

Mathématiques en Méditerranée – Des tablettes cunéiformes au théorème de Fermat, Edisud, Aix-en-Provence, 1988

Otto Neugebauer, *Les sciences exactes dans l'Antiquité*, Actes Sud, Paris 1990

A. Dahan-Dalmenico / J.Peiffer, *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Seuil, Paris 1986

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press 1972

Histoire des sciences arabes, sous la direction de Roshdi Rashed, Seuil, Paris 1997

Encyclopaedia Universalis, Corpus 8, Equations algébriques, édition de 1989

B.L. van der Waerden, *A History of Algebra*, From al-Khwarizmi to Emmy Noether, Springer-Verlag, Berlin, 1985

Groupe d'histoire des mathématiques pour 1978-1979, *Equations du second degré*, IREM de Toulouse 1979

Maurice Caveing, *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Presses Universitaires du Septentrion, Villeneuve d'Ascq 1998

Gilles Godefroy, *L'Aventure des nombres*, Editions Odile Jacob, Paris 1997

Jamblique, *Vie de Pythagore*, Les Belles Lettres, Paris 1996.

Diogène Laërce, *Vies et opinions des hommes illustres*, Les Belles Lettres.